

بسم الله الرحمن الرحيم

کلاس نکته و تست
نظریه زبان ها و ماشین ها

ابوالفضل گیلک

جلسه دوم – فصل دوم
24 تست ابتدای فصل
ماشین متناهی

حل تست های 15 سال اخیر

ارشد – دکتری

مهندسی کامپیوتر – علوم کامپیوتر

فصل 2

تست‌های ماشین‌های منتهای

1-24

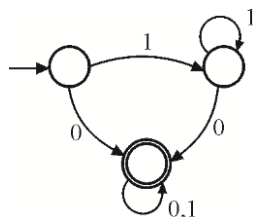
1- آیا می‌توان هر ماشین منتهای قطعی (DFA) را به DFA ای معادل تبدیل کرد به گونه‌ای که حالت شروع آن هیچ یال ورودی نداشته باشد؟ (یعنی تنها یال ورودی همان پیکان شروع باشد).
(مهندسی کامپیوتر - 1402)

- (1) بله همیشه می‌توان این کار را کرد.
- (2) خیر این کار همیشه امکان‌پذیر نبوده و بستگی به زبان دارد.
- (3) فقط در صورتی که این کار امکان‌پذیر است که حالت ورودی طوقه (self-loop) نداشته باشیم.
- (4) فقط در صورتی که این کار امکان‌پذیر است که از حالت پایانی به حالت اولیه یال نداشته باشیم.

2- تعداد حالات ماشین منتهای قطعی (DFA) کمینه زبان $L = \{a^n b^n \mid n \leq 50\}$ چقدر است؟
(مهندسی کامپیوتر - 1402)

- 50 (1) 51 (2) 100 (3) 102 (4)

3- در خصوص پذیرنده منتهای قطعی (DFA) زیر، کدام مورد درست است؟
(مهندسی کامپیوتر - 98)



- (1) زبان این پذیرنده منتهای است.
- (2) DFA ای هم‌ارز این پذیرنده و با تعداد حالات کمتری وجود دارد.
- (3) این پذیرنده همه رشته‌هایی از 0 و 1 به طول حداقل 1 را می‌پذیرد.
- (4) این پذیرنده همه رشته‌هایی از 0 و 1 به طول حداقل 2 را می‌پذیرد.

4- چند پذیرنده منتهای قطعی (DFA) با 2 حالت و الفبای $\{0,1\}$ وجود دارد؟
(مهندسی کامپیوتر - 97)

- 16 (1) 26 (2) 32 (3) 64 (4)

5- یک زبان منظم توسط یک آتوماتون منتهای قطعی D با n حالت و یک آتوماتون منتهای غیرقطعی C با m حالت پذیرفته می‌شود کدام گزینه درست است؟
(علوم کامپیوتر - 95)

- (1) همواره $n > m$ است.
- (2) اگر D و C هیچ‌کدام دارای گذر λ نباشد آن‌گاه $n = m$
- (3) همواره یک آتوماتون غیرقطعی یا کمتر از n حالت برای پذیرش این زبان وجود دارد.
- (4) همواره یک آتوماتون منتهای قطعی با 2^m حالت برای پذیرش این زبان وجود دارد.

6- آیا می‌توان یک آتوماتون غیرقطعی که بدون گذار λ است و دارای چند حالت پذیرش است را به یک آتوماتون منتهای غیرقطعی بدون گذار λ با یک حالت پذیرش تبدیل کرد؟ (علوم کامپیوتر - 95)

- (1) خیر، فقط می‌توان منتهای غیرقطعی دارای گذار λ و با یک حالت پذیرش ساخت.
- (2) بله، همیشه می‌توان این عمل را انجام داد.
- (3) در صورتی می‌توان این کار را انجام داد که آتوماتون منتهای غیرقطعی اولیه کلمه‌ی λ را نپذیرد.
- (4) در صورتی می‌توان این کار را انجام داد که روی حالت‌های پذیرش Loop وجود نداشته باشد.

7- اگر $k > 1$ عددی صحیح و ثابت باشد، زبان L بر روی الفبای Σ بدین ترتیب تعریف شده است که هر عضو آن دارای حداقل k حرف یکسان در انتهای خود باشد. حداقل تعداد حالات آتوماتون منتهای قطعی برای پذیرش L چقدر است؟ (علوم کامپیوتر - 94)

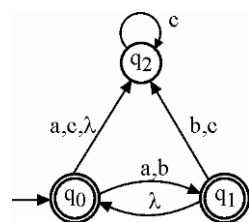
$$k + |\Sigma| + 1 \quad (4)$$

$$k + |\Sigma| \quad (3)$$

$$k \times |\Sigma| + 1 \quad (2)$$

$$k \times |\Sigma| \quad (1)$$

- 8- گراف اتوماتون متناهی زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید که L_i ($i \in \{0,1,2\}$) زبان اتوماتون متناهی یا گراف زیر باشد که حالت شروع آن q_i است. مجموعه‌ی $L_0 \cap L_1 \cap L_2$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر - 93)

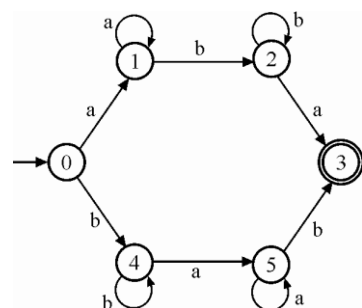


- (1) $\emptyset$
- (2) $\{\lambda\}$
- (3) $\{a,b\}^*$
- (4) $a^* + b^*$

- 9- زبان L از کلیه کلمات $w \in \Sigma^*$ تشکیل شده است که w زیررشته‌ی ثابت و مشخص x به طول n که دارای k حرف متمایز است را دارا است. حداقل تعداد حالات یک اتوماتون قطعی برای توصیف L کدام است؟ (علوم کامپیوتر - 93)

- (1) $n+2$
- (2) $n+1$
- (3) $k+1$
- (4) $n+k$

(مهندسی کامپیوتر - 92)



- 10- ماشین روبرو چه رشته‌هایی را می‌پذیرد؟

- (1) رشته‌هایی از $\{a,b\}$ که ab یا ba را به صورت زیررشته دارند.
- (2) رشته‌هایی از $\{a,b\}$ که تعداد a ها یا b ها در آن زوج است.
- (3) رشته‌هایی از $\{a,b\}$ که aba یا bab را به صورت زیررشته دارند.
- (4) رشته‌هایی از $\{a,b\}$ که هم ab و هم ba را به صورت زیررشته دارند.

- 11- L زبانی است با الفبای $\Sigma = \{0,1\}$ به قسمتی که کلیه رشته‌های L دارای حداقل یک زیررشته‌ی 11 و فاقد زیررشته 00 هستند. کوچکترین آتاماتی که این زبان را شناسایی کند دارای چند وضعیت (حالت) است؟ (توضیح: وضعیت (حالت) شناسایی همان Final State است). (مهندسی کامپیوتر - 89)

- (1) 5 وضعیت که دو وضعیت آن از نوع شناسایی است.
- (2) 6 وضعیت که دو وضعیت آن از نوع شناسایی است.
- (3) 5 وضعیت که سه وضعیت آن از نوع شناسایی است.
- (4) 6 وضعیت که سه وضعیت آن از نوع شناسایی است.

(علوم کامپیوتر - 87)

- 12- کدام گزاره صحیح است؟

- (1) برای هر زبان $L \subseteq \{0,1\}^*$ یک اتوماتون قطعی (احتمالاً با نامتناهی حالت) وجود دارد که زبان آن با L برابر است.
- (2) برای هر زبان $L \subseteq \{0,1\}^*$ یک اتوماتون قطعی متناهی وجود دارد که زبان آن با L برابر است.
- (3) برای هر زبان $L \subseteq \{0,1\}^*$ یک اتوماتون غیرقطعی متناهی وجود دارد که زبان آن با L برابر است.
- (4) برای هر زبان نامتناهی $L \subseteq \{0,1\}^*$ یک اتوماتون غیرقطعی متناهی وجود دارد که زبان آن با L برابر است.

(علوم کامپیوتر - 87)

- 13- برای هر زبان منظم $L \subseteq \{0,1\}^*$

- (1) اتوماتون مینیمال $\Sigma^* - L$ حتماً دارای یک حالت پذیرش منحصربه‌فرد یکتاست.
- (2) اتوماتون مینیمال L حتماً دارای یک حالت پذیرش منحصربه‌فرد یکتاست.
- (3) اگر M یک اتوماتون قطعی مینیمال L با q حالت باشد آن‌گاه $q > \min\{|w| : w \in \Sigma^* - L\}$
- (4) تعداد حالات اتوماتون‌های مینیمال L و $\Sigma^* - L$ برابر است.

(مهندسی کامپیوتر - 84)

- 14- کدام یک از زبان‌های زیر منظم است؟

$$L_1 = \{x^n y^n \mid x \in (0+1)^*, y \in (0+1)^*, n \geq 0\}$$

$$L_2 = \{w \in L(A) \mid \text{از چند حالت معین } A \text{ عبور نمی‌شود.}\}$$

$L_3 = \{w \in (0+1)^* \mid n \geq 0 \text{ باشد}\}$

- (1) L_3 و L_1 (2) L_3 و L_2 (3) L_1 ، L_2 و L_3 (4) هیچ کدام منظم نیستند.

15- اگر $m(L)$ تعداد حالات DFA مینیمال زبان $L \subseteq \{0,1\}^*$ باشد، کدام گزاره همواره درست است؟ (علوم کامپیوتر - 85)

- (1) $m(L) = m(L^R)$ (2) $m(L) \geq 2^{m(L^R)}$ (3) $m(L) \leq 2^{m(L^R)}$ (4) $m(L) \leq \min(m(L), m(L^R))$

16- اگر $\Sigma = \{0,1,\dots,n\}$ و $L = \{w \mid \exists k \geq 0, |w| = 2k\} \subseteq \Sigma^*$ یک زبان با حروف Σ باشد، آنگاه تعداد حالات اتوماتون قطعی

متناهی (DFA) مینیمال متناظر با زبان L است. (علوم کامپیوتر - 84)

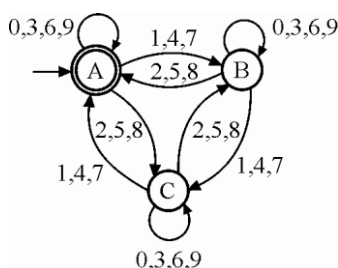
- (1) n (2) $2n-1$ (3) $2n$ (4) عددی ثابت و مستقل از n

17- زبان $\{a^{2n}b^{2n} \mid n \leq 2^{100}\}$ از چه نوعی است؟ (مهندسی کامپیوتر - 80)

- (1) منظم (2) مستقل از متن ولی منظم نیست. (3) حساس به متن ولی مستقل از متن نیست. (4) بدون محدودیت ولی حساس به متن نیست.

18- ماشین پذیرنده متناهی زیر را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه رشته‌های زیر، توسط این ماشین پذیرفته می‌شود؟

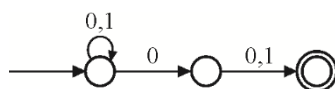
(مهندسی کامپیوتر - 76)



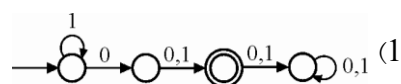
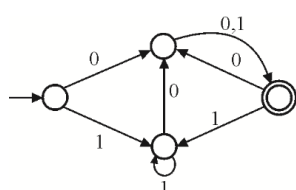
- (1) رشته‌هایی از اعداد که بر 3 بخش پذیرند.
(2) رشته‌هایی از اعداد که طولشان بر 3 بخش پذیر است.
(3) رشته‌هایی از اعداد که طولشان بر 3 بخش پذیر بوده و به یکی از ارقام 3,6,9 و صفر ختم می‌شوند.
(4) هیچ کدام

(مهندسی کامپیوتر - 81)

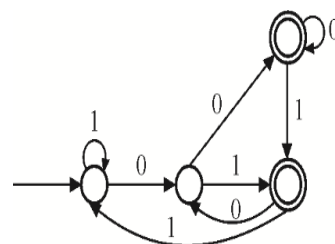
19- اتوماتون قطعی معادل با اتوماتون زیر را انتخاب کنید.



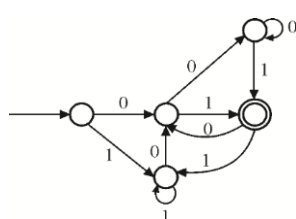
(2)

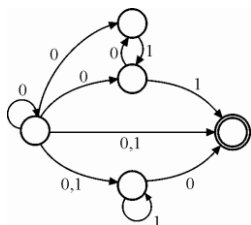


(3)

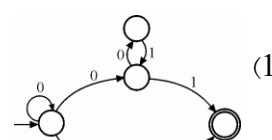
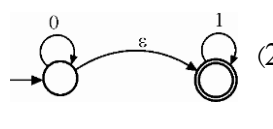
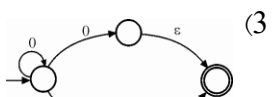
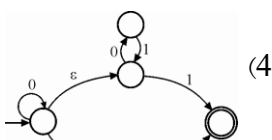


(4)





20- اگر ϵ کلمه تهی باشد، اتوماتون مقابل با کدام یک از اتوماتون‌های داده شده، معادل است؟
(علوم کامپیوتر - 80)



21- می‌دانیم که یک DFA داده شده با 1391 حالت رشته‌ای به طول 2012 را می‌پذیرد. اگر L زبان متناظر با این DFA باشد:

(علوم کامپیوتر - 92)

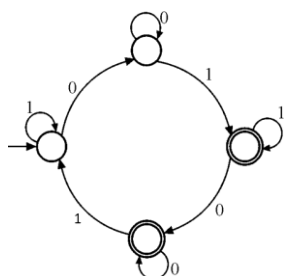
(1) تعداد اعضای L لزوماً نامتناهی است.

(2) تعداد اعضای L لزوماً متناهی است.

(3) L لزوماً شامل هیچ رشته‌ای به طول 2013 نیست.

(4) تعداد اعضای زبان هر NFA معادل با این DFA، لزوماً متناهی است.

(علوم کامپیوتر - 90)



22- زبان اتوماتون شکل زیر معادل کدامیک از زبان‌های مطرح شده است؟

(1) $L = \{w : w \text{ شامل زیررشته } 010 \text{ با تکرار فرد است}\}$

(2) $L = \{w : w \text{ شامل زیر رشته‌های } 01 \text{ یا } 010 \text{ است}\}$

(3) $L = \{w : w \text{ شامل زیر رشته‌های } 01 \text{ و } 010 \text{ است}\}$

(4) $L = \{w : w \text{ شامل زیررشته } 01 \text{ با تکرار فرد است}\}$

23- اگر $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ یک اتومات متناهی باشد تعریف می‌کنیم: $\bar{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$ همچنین $d(M)$ اتومات قطعی معادل

M خواهد بود. اگر M_1 و M_2 دو اتومات متناهی باشد $M_1 + M_2$ اتومات متناهی است که زبان آن اجتماع زبان‌های M_1 و

M_2 است. فرض کنید G_1 و G_2 دو گرامر منظم باشند که زبان آن‌ها به ترتیب معادل زبان‌های M_1 و M_2 هستند. کدام عبارت

زیر صحیح است.

(مهندسی کامپیوتر - 88)

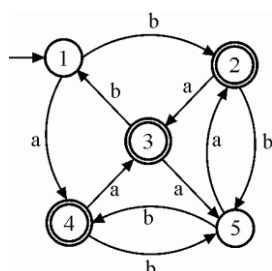
$$L(G_1) - L(G_2) = \overline{L(d(\bar{d}(M_1) + M_2))} \quad (2)$$

$$L(G_1) - L(G_2) = \overline{L(\bar{M}_1 + M_2)} \quad (1)$$

$$L(G_1) - L(G_2) = \overline{L(d(\bar{d}(M_1) + d(M_2)))} \quad (4)$$

$$L(G_1) - L(G_2) = \overline{L(d(\bar{M}_1) + d(M_2))} \quad (3)$$

24- اتومات منتهای شکل روبرو را در نظر بگیرید. اتومات کمینه مربوطه دارای چند حالت خواهد بود؟ (مهندسی کامپیوتر - 85)



3 (1)

2 (2)

5 (3)

4 (4)

(3) اگر $L(D_1) \neq L(D_2)$ باشد پس $L(D_1 \times D_2) = \emptyset$ اگر (4) اگر $L(D_2) \subseteq L(D_1)$ باشد پس $L(D_1 \times D_2) = \emptyset$

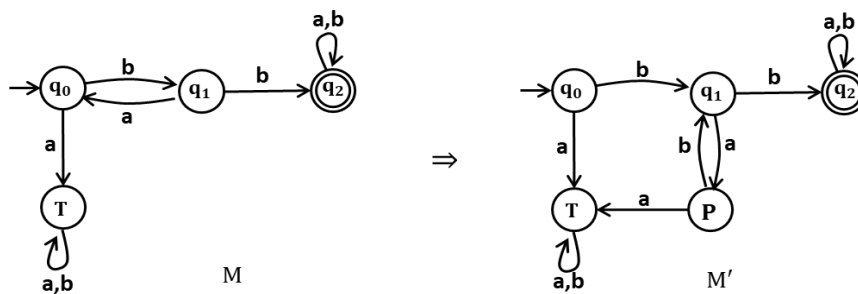
پاسخ تست‌های ماشین‌های منتهای

1-24

1- گزینه (1) صحیح است.

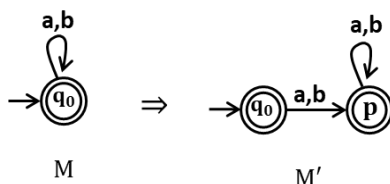
بله برای هر ماشین DFA می‌توان DFA معادلی یافت که حالت اولیه آن هیچ یال ورودی نداشته باشد. فرض کنید در یک DFA حالت اولیه (q_0) دارای یال ورودی باشد. این تغییرات را اعمال می‌کنیم تا DFA معادلی بدون یال ورودی به حالت اولیه ایجاد شود: الف: یک حالت جدید P به ماشین اضافه کنیم. ب: مشابه هریال خروجی از q_0 یک یال خروجی از P در نظر بگیرید. مثلاً اگر $\delta(q_0, b) = q_2$ حالا $\delta(P, b) = q_2$. ج: مشابه هریال ورودی به q_0 یک یال ورودی به P در نظر بگیرید. مثلاً اگر $\delta(q_2, b) = P$ حالا $\delta(q_2, b) = q_0$. د: حالا یال‌های ورودی به q_0 را حذف کنید. و: اگر q_0 ، حالت پذیرش بوده، P را نیز حالت پذیرش فرض می‌کنیم. به این ترتیب یک DFA معادل به دست می‌آید که حالت اولیه اش یال ورودی ندارد.

مثال: در ماشین قطعی M حالت اولیه یال ورودی دارد. آن را به ماشین قطعی و معادل M' تبدیل کرده‌ایم که در آن حالت اولیه یال ورودی ندارد.

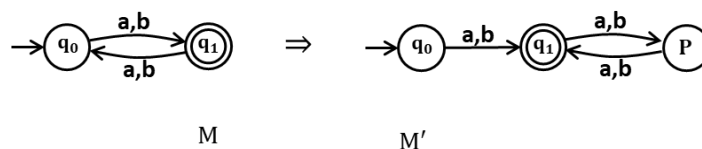


$$L(M) = L(M') = b(ab)^*b(a+b)^*$$

مثال دیگر: ماشین قطعی M پذیرنده $L = \{a, b\}^*$ است. حالت اولیه در آن یال ورودی دارد. آن را به ماشین قطعی و معادل M' تبدیل کرده‌ایم که حالت اولیه‌اش انتقال ورودی ندارد.

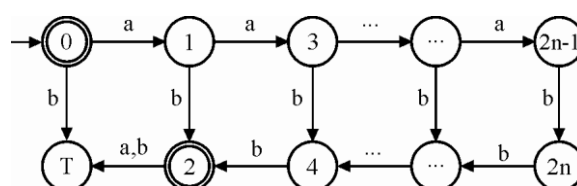


در ضمن وجود یال از حالت پایانی به حالت اولیه مشکلی ایجاد نمی‌کند. مثلاً به نمونه دیگری از تبدیل M به M' توجه کنید.



2- گزینه (4) صحیح است.

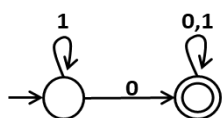
تعداد حالات DFA کمینه برای زبان $L = \{a^n b^n \mid n \leq N\}$ برابر $2N+2$ است.



برای $N = 50$ به 102 حالت می‌رسیم. (در این نمودار همه انتقال‌هایی که رسم نشده‌اند به حالت T وارد می‌شوند).

3- گزینه (2) صحیح است.

دو حالت غیرنهایی در این DFA قابل ادغام هستند و DFA کمینه و معادل آن دارای دو حالت است و آن را رسم کرده‌ایم.



پس گزینه 2 صحیح است. در ضمن زبان مورد پذیرش این ماشین با عبارت منظم $1^*0(0+1)^*$ قابل بیان است یعنی تمامی رشته‌های باینری که دارای حداقل یک 0 هستند.

4- گزینه (4) صحیح است.

ابتدا در حالت کلی‌تری پاسخ را بیابیم. فرض کنیم تعداد حالات $|Q| = n$ و تعداد الفبا $|Σ| = k$ باشد؛ هر کدام از حالات می‌توانند نهایی یا غیرنهایی باشند (دو انتخاب برای هر حالت). از هر حالت با هر الفبا می‌توان به هر یک از n حالت انتقال داشت؛ پس تعداد کل انتقال‌های متمایزی که از یک حالت می‌توان داشت n^k است؛ بنابراین تعداد کل dfa های دوبه‌دو متمایز برابر است با:

$$\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_n \times \underbrace{n^k \times n^k \times \dots \times n^k}_n = 2^n \times n^{kn}$$

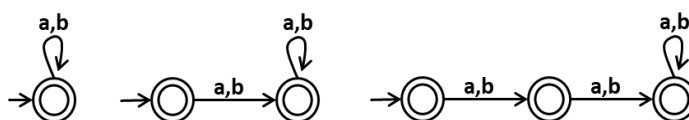
توضیح مهم درباره نقش حالت اولیه: فرض کنیم مجموعه حالات $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ باشد و q_1 حالت اولیه باشد تعداد dfa های دوبه‌دو متمایز برابر $2^n \times n^{kn}$ است. از طرفی با توجه به این که n حالت داریم n تا انتخاب برای حالت اولیه داریم و فرمول باید در n ضرب شود و بنابراین براساس اصل ضرب و دانش ترکیبات تعداد کل dfa ها باید $2^n \times n^{kn+1}$ باشد. اما نکته‌ای که باید به آن توجه کنیم این است که وقتی حالت اولیه عوض شود، مثلاً q_2 به عنوان حالت اولیه انتخاب شود براساس نظریه گراف، هر یک از $2^n \times n^{kn}$ ماشین حاصل با حالت اولیه q_2 یکرخت با یکی از ماشین‌های با حالت اولیه q_1 می‌باشد. بنابراین با لحاظ کردن شرط متمایز بودن گراف‌ها، تعداد dfa های دوبه‌دو متمایز برابر $2^n \times n^{kn}$ است.

نتیجه: با داشتن n حالت و k الفبا تعداد کل dfa های دوبه‌دو متمایز اگر گراف‌های یکرخت را یکی لحاظ کنیم، $2^n \times n^{kn}$ و اگر این گراف‌ها را متمایز بگیریم $2^n \times n^{kn+1}$ است.

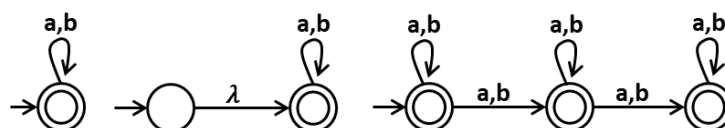
در این تست n و k برابر 2 در نظر گرفته شدند پس تعداد dfa های دوبه‌دو متمایز با لحاظ کردن شرط متمایز بودن گراف‌ها، برابر 64 می‌باشد و گزینه 4 صحیح است.

5- گزینه (4) صحیح است.

هیچ حکم مقایسه‌ای همیشه درستی بین تعداد حالات ماشین‌های منتهای قطعی و غیرقطعی پذیرنده یک زبان نداریم. پس گزینه‌های 1، 2 و 3 مثال نقض دارند. به عنوان مثال زبان منظم $(a+b)^*$ دارای DFA پذیرنده با یک حالت، دو حالت، سه حالت، است که در شکل می‌بینید:



همین زبان دارای NFA پذیرنده (با حرکات λ یا بدون حرکات λ) با یک، یا دو، یا سه حالت است که مشاهده می‌کنید:



اما در مورد گزینه 4: وقتی ماشین NFA دارای m حالت باشد، یک DFA معادل دارد که هر حالت آن یک زیرمجموعه از این m حالت است پس یک DFA معادل با 2^m حالت وجود دارد.

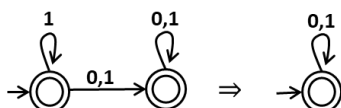
توجه: از آنجا که این DFA لزوماً کمینه نیست پس با کمینه کردن آن می‌توان گفت یک DFA معادل با حداکثر 2^m حالت وجود دارد.

6- گزینه (3) صحیح است.

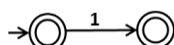
همانطور که می‌دانید هر زبان منظم (و هر ماشین متناهی) دارای NFA معادل، با فقط یک حالت پذیرش است. اگر آن زبان منظم شامل λ نباشد، دارای NFA معادل، با فقط یک حالت پذیرش، و بدون انتقال λ است. پس برای آنکه NFA بدون انتقال λ با چند حالت پذیرش حتماً قابل تبدیل به NFA بدون انتقال λ با یک حالت پذیرش باشد کفایت λ عضو زبان ماشین نباشد.

برای سایر گزینه‌ها مثال نقض وجود دارد.

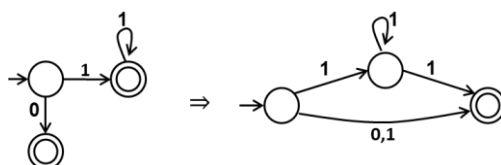
مثال نقض برای گزینه 1:



مثال نقض برای گزینه 2: این ماشین قابل تبدیل به صورت خواسته شده نیست:



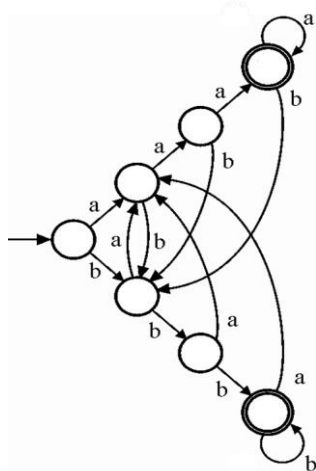
مثال نقض برای گزینه 4: در این مثال با آنکه روی حالت پذیرش حلقه وجود دارد، امکان تبدیل وجود دارد:



7- گزینه (2) صحیح است.

فرض کنید $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ باشد. یک مسیر به طول k با انتقال‌های a_1 از حالت اولیه به حالت پذیرش خواهیم داشت. یک مسیر دیگر به طول k با انتقال‌های a_2 از حالت اولیه به یک حالت پذیرش دیگر در ماشین خواهیم داشت. به همین ترتیب برای هر الفبای a_i یک مسیر به طول k با انتقال‌های a_i از حالت اولیه به یک حالت پذیرش خواهیم داشت. این مسیرها فقط در حالت اولیه مشترک هستند. روی هر مسیر به جز حالت اولیه k حالت دیگر وجود دارد. پس تعداد حالات DFA کمینه $k \times |\Sigma| + 1$ است.

توضیح روی شکل: برای فهم بهتر، فرض کنید $\Sigma = \{a, b\}$ و $k = 3$ باشد. زبان مورد نظر رشته‌هایی دارد که به aaa یا bbb ختم شوند. DFA کمینه پذیرنده به شکل مقابل است. همانطور که می‌بینید دو مسیر به طول سه که فقط در حالت اولیه مشترک هستند در آن وجود دارد. یکی برای الفبای a و دیگری برای الفبای b تعداد حالات DFA کمینه برابر با $3 \times 2 + 1$ است. در حالت کلی تعداد حالات $k \times |\Sigma| + 1$ است.



8- گزینه (1) صحیح است.

با شروع از حالت q_2 هیچ رشته‌ای پذیرفته نمی‌شود. از حالت q_2 به سایر حالات مسیری نداریم و خود q_2 نیز حالت پذیرش نیست، پس زبان L_2 تهی است در نتیجه حاصل $L_0 \cap L_1 \cap L_2$ تهی خواهد بود.

9- گزینه (2) صحیح است.

تعداد حروف متمایز مهم نیست اما کمترین طول رشته‌های یک زبان، روی تعداد حالات DFA اثر می‌گذارد. هر رشته w عضو زبان L دارای زیر رشته x به طول n است؛ پس طول هر رشته از زبان L حداقل n است، طبق متن درس هر DFA پذیرنده این زبان دستکم دارای $n+1$ حالت است.

10- گزینه صحیح وجود ندارد. گزینه (4) بهترین انتخاب است.

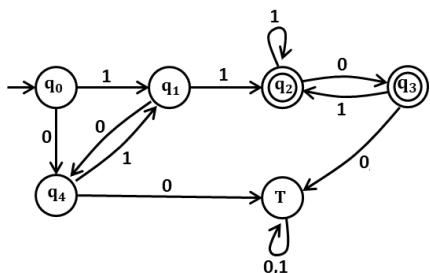
رشته‌هایی که از طریق مسیر بالایی به حالت پذیرش می‌رسند به فرم a^+b^+a هستند. رشته‌هایی که از طریق مسیر پایینی به حالت پذیرش می‌رسند به فرم b^+a^+b هستند. بنابراین زبان پذیرفته شده توسط ماشین $a^+b^+a + b^+a^+b$ است. تمام رشته‌هایی که توسط این ماشین پذیرفته می‌شوند هم ab و هم ba را به عنوان زیر رشته دارند اما رشته‌هایی هم هستند که هم ab و هم ba را به عنوان زیر رشته دارند اما

توسط ماشین پذیرفته نمی‌شوند برای مثال bababab.

گزینه 1 نادرست است زیرا ماشین ab را نمی‌پذیرد. گزینه 2 نادرست است زیرا ماشین رشته a را نمی‌پذیرد. گزینه‌های 3 و 4 نادرستند زیرا ماشین abab را نمی‌پذیرد.

توجه: به نظر می‌رسد در رسم شکل یک حلقه از حالت پذیرش به خودش با الفباهای a و b جا افتاده است. اگر چنین حلقه‌ای اضافه کنیم گزینه 4 کاملاً صحیح می‌شود.

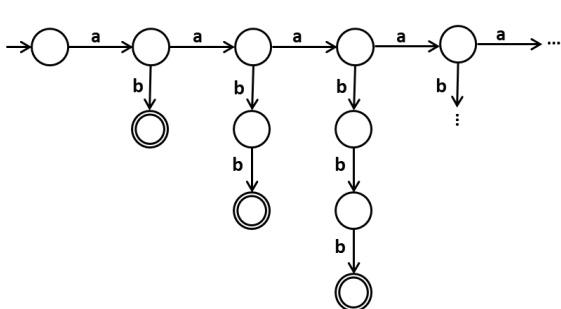
11- گزینه (1) صحیح است.



ماشین متناهی قطعی و کمینه برای پذیرش زبان منظم L به شکل مقابل است: این ماشین دارای 6 حالت است که یکی از آنها حالت تله است. در صورت سؤال به DFA کمینه اشاره نکرده است. پس می‌توانیم با حذف حالت تله یک ماشین متناهی فقط با 5 حالت که 2 تای آنها حالت پذیرش هستند برای این زبان یافت.

12- گزینه (1) صحیح است.

فقط زبان‌های منظم دارای پذیرنده متناهی (DFA و NFA) هستند. زبان $L \subseteq \{0,1\}^*$ ممکن است منظم نباشد پس گزینه‌های 2، 3 و 4 نادرست هستند. اما اگر اجازه دهیم تعداد حالات ماشین در صورت نیاز نامتناهی شود، هر زبان $L \subseteq \{0,1\}^*$ دارای ماشین پذیرنده قطعی (و غیرقطعی) خواهد بود. پس گزینه 1 صحیح است.



توضیح: برای مثال زبان $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم این زبان منظم نیست پس ماشین متناهی پذیرنده (DFA و NFA) ندارد. اما برای همین زبان می‌توان ماشین پذیرنده ای شبیه به DFA اما دارای بی‌نهایت حالت طراحی کرد:

در شکل فوق حالت تله را نشان نداده‌ایم. انتقال‌های تعریف نشده به حالت تله می‌روند.

13- گزینه (3) صحیح است.

وقتی L منظم باشد $\Sigma^* - L$ نیز منظم است. هر زبان منظم دارای ماشین متناهی غیرقطعی فقط با یک حالت پذیرش است اما در مورد ماشین متناهی قطعی، معلوم نیست که DFA کمینه فقط دارای یک حالت پذیرش باشد. مثلاً برای زبان منظم $L = \{a, aa, aaa\}$ نمی‌توان DFA فقط یک حالت پذیرش پیدا کرد. در گزینه‌های 1 و 2 مشخص نکرده ماشین کمینه، قطعی است یا غیرقطعی پس این گزینه‌ها نادرستند. در مورد گزینه‌های 3 و 4 یادآوری می‌کنیم که DFA کمینه زبان L را می‌توان با تغییر حالات پذیرش به غیرپذیرش و بالعکس، به DFA کمینه زبان $\bar{L} = \Sigma^* - L$ تبدیل کنیم پس DFA های کمینه هر دو زبان تعداد حالات یکسانی دارند. این مطلب را در کنار این نکته بگذارید که تعداد حالات DFA کمینه هر زبان منظم، از کمترین طول رشته‌های عضو زبان، بیشتر است. پس گزینه 3 درست است چه آن را برای L بنویسیم چه برای $\bar{L}$ بنویسیم. گزینه 4 نادرست است زیرا به قطعی بودن ماشین اشاره نکرده است.

14- گزینه (3) صحیح است.

در زبان L_1 اگر به حالت $n=1, y=\lambda$ توجه کنید معلوم می‌شود هر $x \in (0+1)^*$ عضو است. پس $L_1 = \{0,1\}^*$ و این زبان منظم است. L_2 نیز منظم است زیرا از روی ماشین متناهی قطعی A می‌توان یک ماشین متناهی قطعی برای زبان L_2 طراحی کرد به این صورت که حالت‌هایی که نباید حین مصرف رشته‌ها از آنها عبور کنیم را از ماشین حذف کنیم (تمام انتقال‌های ورودی به آنها را به حالت تله ببریم) به این ترتیب ماشین متناهی قطعی پذیرنده برای زبان L_2 خواهیم داشت پس L_2 منظم است. در مورد زبان L_3 ، n عددی ثابت فرض شده است پس این زبان متناهی است در نتیجه منظم است. به احتمال بیشتر منظور جمله آن است که تعداد 0ها برابر n بوده و همچنین تعداد 1ها برابر n باشد تعداد چنین رشته‌هایی $\frac{(2n)!}{n! \times n!}$ است. تفسیر با احتمال کمتر این است که مجموع تعداد 0 و 1ها برابر n باشد پس L_3 مجموعه همه رشته‌های باینری به طول n است. تعداد این رشته‌ها 2^n است؛ در هر صورت L_3 متناهی می‌شود و هر زبان متناهی، منظم است.

15- گزینه (3) صحیح است.

یادآوری کنیم که DFA های کمینه زبان‌های L و $\bar{L}$ تعداد حالات برابری دارند، چون کفایت حالات پذیرش را به غیرپذیرش و بالعکس تبدیل کنیم. اما تعداد حالات DFA کمینه L و L^R لزوماً برابر نیست. وقتی در DFA پذیرنده L جهت انتقال‌ها را معکوس می‌کنیم، قطعی بودن ماشین از دست می‌رود و لازم می‌شود از الگوریتم تبدیل NFA به DFA استفاده کنیم این باعث می‌شود رابطه زیر بین تعداد حالات DFA کمینه L و L^R برقرار باشد: $m(L^R) \leq 2^{m(L)}$. از طرفی $L = (L^R)^R$ پس:

$$m(L) \leq 2^{m(L^R)} \text{ and } m(L^R) \leq 2^{m(L)}$$

توجه: از ترکیب این نامساوی‌ها به این نتیجه می‌رسیم:

$$\log(m(L^R)) \leq m(L) \leq 2^{m(L^R)}$$

$$\log(m(L)) \leq m(L^R) \leq 2^{m(L)}$$

16- گزینه (4) صحیح است.



زبان L مجموعه همه رشته‌های به طول زوج روی الفبای Σ است. ماشین قطعی کمینه برای پذیرش این زبان، دارای دو حالت است و تعداد حالات ماشین مستقل از تعداد الفباست.

17- گزینه (1) صحیح است.

محدودیت $n \leq 2^{100}$ باعث می‌شود زبان داده شده متناهی باشد و هر زبان متناهی یک زبان منظم است.

18- گزینه (1) صحیح است.

در ماشین داده شده عدد صفر پذیرفته می‌شود و در ادامه هرگاه از حالت پذیرش خارج می‌شویم، برای بازگشت دوباره به حالت پذیرش باید مجموع ارقام طی شده مضرب 3 باشد. بنابراین رشته‌هایی پذیرفته می‌شوند که مجموع ارقامشان بر 3 بخشپذیر باشد. هرگاه مجموع ارقام یک عدد بر 3 بخشپذیر باشد به معنای بخشپذیری خود آن عدد بر 3 است. پس گزینه 1 صحیح است. در ضمن این ماشین رشته‌هایی مانند 12 و 1323 را می‌پذیرد در حالی که طولشان مضرب 3 نیست. پس گزینه‌های 2 و 3 رد می‌شود.

19- گزینه (3) صحیح است.

ماشین غیرقطعی داده شده زبان $0(0+1)^*0(0+1)$ را می‌پذیرد یعنی رشته‌هایی که به 01 یا 00 ختم می‌شوند. گزینه 3 نیز همین زبان را می‌پذیرد. سایر گزینه‌ها رد می‌شوند. آنها رشته 000 را نمی‌پذیرند درحالی که ماشین داده شده 000 را می‌پذیرد.

20- گزینه (4) صحیح است.

ماشین متناهی داده شده رشته 0 را می‌پذیرد اما گزینه یک این رشته را نمی‌پذیرد. ماشین متناهی داده شده رشته ϵ را نمی‌پذیرد اما گزینه دو رشته تهی را می‌پذیرد. ماشین متناهی داده شده رشته 1 را می‌پذیرد اما گزینه سه این رشته را نمی‌پذیرد. بنابراین فقط گزینه 4 می‌تواند صحیح باشد.

21- گزینه (1) صحیح است.

رشته‌ای توسط ماشین DFA پذیرفته شده است که طول آن از تعداد حالات ماشین بزرگتر است. این نشان‌دهنده وجود دور در مسیری از حالت اولیه تا حالت پذیرش است. پس زبان این DFA نامتناهی است.

22- گزینه (4) صحیح است.

گزینه 1 نادرست است مثلاً DFA داده شده رشته 01 را می‌پذیرد در حالی که زیررشته 010 در آن صفر بار تکرار شده است. ماشین داده شده رشته 0101 را نمی‌پذیرد در حالی که گزینه 2 این رشته را دارد. پس گزینه 2 نیز نادرست است. ماشین مذکور رشته 01 را می‌پذیرد ولی این رشته به زبان گزینه 3 تعلق ندارد؛ پس گزینه 3 نادرست است. اما گزینه 4 است صحیح است دقیقاً رشته‌هایی توسط این DFA پذیرفته می‌شوند که تعداد فردی زیررشته 01 داشته باشند.

23- گزینه (2) صحیح است.

اگر M ماشین متناهی غیرقطعی باشد، متمم $L(M)$ لزوماً برابر $L(\bar{M})$ نیست اما اگر ماشین قطعی معادل با M را بیابیم آنگاه با تبدیل حالات پذیرش به غیرپذیرش و بالعکس ماشین قطعی پذیرنده مکمل (متمم) را خواهیم داشت. بنابراین، برای رسیدن به ماشین متناهی

پذیرنده $\overline{L(M)}$ ابتدا باید ماشین M را به ماشین قطعی معادلش $d(M)$ تبدیل کنیم، سپس از آن متمم بگیریم. بنابراین $\overline{L(M)}$ برابر $L(\overline{d(M_1)})$ است.

از طرفی طبق قانون دمورگان داریم: $A - B = A \cap \overline{B} = \overline{(\overline{A} \cup B)}$ پس برای دو زبان $A = L(G_1)$ و $B = L(G_2)$ داریم:

$$L(G_1) - L(G_2) = L(G_1) \cap \overline{L(G_2)} = \overline{(\overline{L(G_1)} \cup L(G_2))} = L(\overline{d(\overline{M_1}) + M_2})$$

توضیح گام به گام: چکیده توضیحات بالا آن است که هرگاه می‌خواهیم متمم زبان به دست آید باید ابتدا ماشین را به ماشین قطعی معادل تبدیل کنیم سپس از آن مکمل بگیریم:

$$L(G_1) = L(M_1), L(G_2) = L(M_2)$$

$$\overline{L(G_1)} = L(\overline{d(M_1)})$$

$$\overline{L(G_1)} \cup L(G_2) = L(\overline{d(M_1)} + M_2)$$

$$\overline{(\overline{L(G_1)} \cup L(G_2))} = L(\overline{d(\overline{M_1}) + M_2})$$

24- گزینه (1) صحیح است.

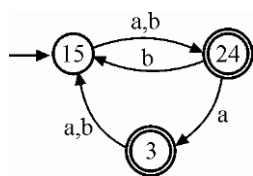
حالت‌های 2 و 4 ادغام‌پذیرند، حالت‌های 1 و 5 ادغام‌پذیرند. در ضمن با به کارگیری روال علامت‌گذاری، زوج‌های ادغام‌ناپذیر عبارتند از:

$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (2, 3), (4, 3)$

$\{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3\}$

بنابراین کلاس‌های هم‌ارزی برابر مجموعه‌های مقابل است:

پس DFA کمینه دارای 3 حالت است:



پیروز و سربلند باشید.